

# Didaktik minus Stoff gleich Methodik?

## oder Das Gegenbeispiel Mittelstufen- geometrie

von Lutz Fübner



### 1. Einige Thesen zur gegenwärtigen Alltagssituation

Der gegenwärtig fortschrittlichste Mathematikunterricht – wie übrigens wohl auch der einiger anderer Fächer – ist gekennzeichnet vom Primat der Didaktik und vom Verfall der Methodik.

Dabei meint „Primat der Didaktik“ kluges Abwägen der Lehr- und Lerninhalte, also etwas, dessen Rang kaum überschätzt werden kann, wenn es dem Schüler im vorgefundenen oder auch künftigen Umfeld helfen will. Mit „Verfall der Methodik“ meine ich nicht, daß man sich zuwenig Gedanken um das „Wie?“ des Unterrichts mache, vielmehr daß der Wunsch nach spektakulären Lernzuwächsen in Einzelstunden – vom Primat der Didaktik gefördert – das Verbalisierbare favorisiert, Training der Fertigkeiten demgegenüber fast diskriminiert und daß immerfort „Einführung von . . .“ praktiziert und propagiert wird, während

Maß und Gestaltung der „Einübung in . . .“ schamhaft und getrost der Phantasie des Einzelkämpfers überlassen bleiben.

Hat der Referendar oder zur Beförderung anstehende Lehrer nicht schon zur Hälfte gesiegt, wenn er am Nachmittag vor der Hospitationsstunde das Liedlein beherzigt:

Planst du mit Methodenwechsel,  
wird die Stund' ein hübsch Gedrechsel!

Und – verleitet nicht die süßliche Mäeutik\*, sokratische, induktive, heuristische oder genetische Methode, das Interaktionen stimulierende „Unterrichtsgespräch“, die affektivierende Suggestivinitiation, kurz: die von allen modernen Didaktoren so inniglich gepriesene Bäumchen-verwechsele-dich-Strategie „Wersweißfragt-wersnichtweißantwortet“ zum Aberglauben, der Schüler habe es ja schon, es war

schon in ihm drin, man habe es ihm nur herausgefragt – Übung erübrige sich darum! Und ist es nicht die Frucht dieses und anderer Aberglauben, daß das Kennenlernen vom Vokabellernen, daß die Begriffe von den Wörtern verdrängt werden?

### 2. Der Zustand der Geometrie in der Sekundarstufe I

Habe ich übertrieben? Habe ich wirklich nur einfach übertrieben? Ich fürchte, was sich heute Geometrieunterricht oder schamhafter (auf der Superstufe) „L. A. & A. G.“\*\* nennt, ist – soweit es den mir bekannten Sekundarstufenunterricht am Gymnasium betrifft – Muster eines metho-

\* Anleitung zum Erkennen durch Fragestellungen (Anm. d. Red.).

\*\* „Lineare Algebra und analytische Geometrie“.

dischen Trauerspiels. Ich will das am Beispiel zweier gegenwärtig sehr weit verbreiteter Schulbücher für die Mittelstufe aufzeigen:

Wegen des sehr unterschiedlich ausgeformten Orientierungsstufenkonzepts kann man in Klasse 7 i. a. wenig geometrische Vorkenntnisse bei den Schülern voraussetzen. Die Bücher sehen zwar für Klasse 5 einige Grundbegriffe (Gebiete, Geraden, Symmetrie, senkrecht, parallel, einfache Flächeninhalte, Quaderinhalt, teilweise auch Kreis) und in Klasse 6 eine mehr oder minder rasche Einführung einiger Isometrien vor, rein seitenzahlmäßig kommt man dabei jedoch nur auf ca. 20 bzw. 30 Prozent des Gesamtwerkes, und hinsichtlich der Konkurrenzsituation, hier Propädeutik – dort Zahlenrechnen, Brüche, Größenbereiche und Sachrechnen, kommt die Geometrie in praxi wohl noch sehr viel schlechter weg.

Eine echte Chance gibt man der Geometrie erst in Klasse 7, wo in bescheidenem Maße systematisch gearbeitet wird: Während das eine Werk nach erneuter Propädeutik die ebenen Bewegungen auflistet und verkettert, Kongruenzsätze und Flächeninhalte abhandelt und am Schluß gar noch die einfachen Vielecke nach Symmetriegerichtspunkten unterscheidet, begnügt sich das andere hier mit Verschiebungen und der Flächenberechnung von Vielecken. Immerhin. Parkettierungen und Flächen wie Winkelberechnungen wird wohl jeder Lehrer für sinnvoll genug halten, um wenigstens ein paar Wochen Geometrie zu wagen. Aber, Hand aufs Herz, in welcher mißlicher Lage spielt sich dieser Unterricht nun ab: Wenn die Schüler in den letzten zwei Jahren überhaupt Geometrieunterricht genossen haben, so ist das meiste verschüttet. Die Reste bestehen oft nur aus oberflächlich angedauten Begriffen, Vokabeln und Bedienungsanleitungen. Und hier soll man nun Grund hereinbringen! Leistungsstand und Interesse der Schüler laufen einem auseinander, wenn man – gar noch in eben erst zusammengewürfelten Klassen – Handwerkliches wie Kreise-, Winkel- und Parallelenzeichen oder Begriffliches wie Quadratgitter, Schrägbild, Kreis und Seitenhalbierende als Abstandslinien, Symmetrie und gewisse Abbildungsvorschriften anspricht. Der Kopf brummt einem vor lauter Wörtern, die eigentlich noch viel zu unklar sind, eigentlich dasein sollten, das eigentlich angesteuerte Ziel verbauen . . .

Und was ist dieses „eigentlich angesteuerte Ziel“? Hier sind sich beide betrachteten (und die meisten anderen verfügbaren) Bücher einig: Das erste große Etappenziel wird in Klasse 8 erreicht, nachdem Buch 2 in puncto Kongruenz, Winkelsätzen und Abbildungstypen noch schnell aufschloß:

Jetzt wird die volle Kongruenzgruppe zusammenverkettet. Höhepunkt der Geometrie in Klasse 8: Wir haben eine Abbildungsgruppe: Aha! So! Und was wird abgebildet? Wenn es hoch kommt einzelne isolierte Drei- und Vierecke, Kreise, Winkel und Parallelen. Im einen Werk sind die Satzsätze im Dreieck und der Umfangswinkelsatz Höhepunkt der Kongruenzgeometrie, im anderen der Dreispiegelungssatz – ernsthaft angewandt wird das alles nicht . . .

In schönstem Gleichklang wird dann in Klasse 9 die Ähnlichkeitsgruppe angesteuert. Der Pythagoras ist dabei mal Vorspiel, mal Abfallprodukt, und die Vektoren werden einmal eingegliedert, im anderen Buch als Nachtrag nach Klasse 10 verlagert, wo sie dann – über das Skalarprodukt gekoppelt – neben der Trigonometrie stehen. (Über die Schwierigkeiten, Vektoren zu unterrichten, braucht hier nicht geredet zu werden.)

Besonders interessant ist dann der allgemeine „Rückfall“ in die haptische Phase, wenn in Klasse 10 die üblichen Körperberechnungen durchgeführt werden: Jetzt endlich tauchen die Körper wieder auf, von denen die Geometrie einmal in Klasse 5 oder 7 abgeschnitten wurde. Zwischendurch wurde der Eindruck erweckt, es ginge in Wahrheit um die Konstituierung einiger Abbildungsgruppen, wenn nicht sogar um den „Gruppenbegriff als solchen“, und nun darf mit einem Mal wieder gerechnet, geschätzt und gemessen werden. Tatsächlich stoßen die zahlenmäßigen Berechnungen bei Trigonometrie, Kegel und Kugel im wahrsten Sinne des Wortes an die Grenzen der Elementargeometrie – und legitimieren dort, nicht ohne Geheimniskrämerei, das, was man dem Schüler in den drei Jahren zuvor mühsam abgewöhnte: die Suche nach konkretem, in Zahlen ausdrückbarem Nutzeffekt!

### 3. Weniger wäre mehr

„Geometrie“ meinte einmal die Kunst oder das Wissen, die Welt zu vermessen, die Erde und den Himmel. Ich denke, das ist auch heute noch ihr Hauptziel. Hier muß ich der weitverbreiteten, z. B. in P. Benders so lesenswertem Artikel in MU 24.5 wiederholt geäußerten Auffassung widersprechen, es ginge primär um „die Struktur des Raumes“. Die Struktur des Raumes wurde erst wieder durch die nichteuklidischen Geometrien zum Problem der Geometrie, und die Methoden für dieses Problem gewannen bis in unser Jahrhundert zunehmend abstrakteren, gruppentheoretischen Charakter. Aber schon Felix Klein wies doch, sogar im Erlanger Programm (!), selbst darauf hin, daß es sich bei

den gruppentheoretischen Untersuchungen um Ordnungs- und Rahmenfragen handelt, daß die Arbeit am „Modell – mag es nun ausgeführt und angeschaut oder nur lebhaft vorgestellt sein – . . . für die Geometrie nicht ein Mittel zum Zwecke, sondern die Sache selbst“ sei. Es geht auch um die Raumstruktur, aber es ging schon immer vor allem um den Raum selbst!

In diesem Sinne nehmen die Abbildungen und die Beobachtung ihrer Gruppeneigenschaft in der Mittelstufengeometrie einen – wie mir scheint – mißlichen Platz ein. Der innermathematische Zweck gruppentheoretischer Überlegungen in der Geometrie, vom Erlanger Programm bis zum Raumproblem, kann dem Schüler teils aus Mangel an Detailkenntnissen, teils aus Gründen des erheblichen Abstraktionsniveaus nicht durchsichtig werden und schon gar nicht als Leitmotiv dienen. Klein, Treutlein, Höfler und die anderen Initiatoren der geometrischen Forderungen des Meraner Programms haben doch nicht wirklich im Sinn gehabt, die ganze Kongruenz- oder auch Ähnlichkeitsgruppe im Unterricht entdecken zu lassen. Für sie war eine gewisse „Abbildungsgeometrie“ das Gebot der Stunde, weil die Figuren auf natürliche Weise aus Abbildungshandlungen wie Falten, Spiegeln, Drehen und aus Abbildungsproblemen im Sinne darstellender Geometrie entstehen, und dies – so vor allem Treutlein als progressivster Antieuklidiker – mit dem einzigen Ziel, wirkliche Körper zu erfassen. Es mutet wie ein Treppenwitz der Didaktikgeschichte an, wenn die damaligen Reformer, die immer wieder Konkretion und Realitätsnähe gefordert haben, denen Anwendungen und Verschmelzung von räumlicher und ebener Geometrie am Herzen lagen, die funktionales Denken in der Variation von wirklichen Gestalten suchten, wenn diese großen Vorkämpfer wirklich modernen, schülerzentrierten Unterrichts heute als Garanten der Abbildungsklassifikationitis aufgezählt werden. Wie etwa die MU-Hefte zur Abbildungsgeometrie zwischen 1956 und 1978 zeigen, sind weitergehende Begründungsversuche für diese Klassifikationitis nicht unternommen worden.

Abbildungsgruppenerkennungsdienst taugt nicht als Dauermotiv für die Unterrichtsarbeit – diese Erkenntnis haben wohl die meisten Kollegen vor Ort gewinnen müssen, und so blieb ihnen nur die Alternative zwischen „Selbermachen ohne Buch“ oder „ein paar Alibiseiten durchklopfen und damit die Geometrie rasch abgewürgt sein lassen“. Und für die letztere Alternative sprach ja so viel: die Zeitnot hinsichtlich des Abprüfbareren (welche Lernziele hat man denn am Schluß einer problemorientierten Geometriestunde erreicht?), den Konkurrenzdruck von der mechanistisch-

schematischen Algebra mit ihren wohlfeilen Erfolgserlebnissen, das eigene Unbehagen mit dem „Königsweg . . .“, die lange Durstphase kümmerlicher Verbalisierungsanläufe auf Schülerseite, das „ich habe es nicht gekonnt“ bei nichttrivialen Hausaufgaben, der Zeitaufwand und Papierverbrauch beim Materialfertigen, das Mißverhältnis von Aufwand und Erfolg auf Lehrerseite, das Beweisproblem, der Lehrplan oder auch nur die Unmöglichkeit, 30 abgekämpften Vierzehnjährigen in der 5. oder 6. Stunde von Geist, Tradition und Ästhetik Ahnungen zu vermitteln . . .

Ich kann dieses Elend der auf dem Markt befindlichen Mittelstufengeometrie hier nicht auf ein paar Seiten „mal eben schnell“ reparieren, aber eine kleine Wunschliste mag anregen zu:

- Wie im MU-Heft „Umwelterschließung im Geometrieunterricht“ von H. Winter und seinen Mitautoren gefordert, sollte Geometrie von wirklichen Dingen ausgehen und sich, zu ihnen zurückkehrend, als nützlich erweisen oder wenigstens denken lassen. Aber bitte keine krampferzeugenden Prinzipien, ob sie nun „Praxisbezug“, „operative Begriffsbildung“ oder „Problemorientierung“ heißen!

- Der Geometrieunterricht in den Klassen 5 und 6 muß wieder von echter Propädeutik für nachfolgende Geometrie getragen und um Kristallisationskeime herum gestaltet werden, die den Schülern reizvoll, einschichtig und erinnerenswert sind.

- Das in Klasse 7 erforderliche ordnende Sichten und Ergänzen sollte in einen Themenkreis eingeschmolzen sein, der Schüler dieses Alters wirklich längere Zeit motivieren kann und dem scheinbaren Sammelsurium von Begriffen und Anleitungen eine (vorläufige) Ordnung und Gewichtung verleiht.

Figuren und geometrische Konstellationen sollten im Leben aufgespürt und – samt ihrer Veränderlichkeit – mathematisch benannt und gemessen werden. Begriffe jedoch, die weder Erkenntnis noch Intuition fördern, sollten gemieden werden. Das bloße Benennen führt auf die Dauer zu oberflächlichstem Scheinwissen. Wird es denn irgendwie fruchtbar, von den Kongruenzabbildungen zu wissen, daß sie eine Gruppe bilden, daß man also – konkret gesprochen – Hinbewegtes auch wieder zurückbewegen kann?

Kongruenz- und Ähnlichkeitsbegriff müssen wieder eine Funktion bekommen, nicht als bloße Klassifikationsmerkmale für bestimmte Konstellationen oder Abbildungen, sondern als Schlüssel für Entdeckun-

gen in komplexeren Situationen. Ist es nicht besser, Schüler Zusammenhänge an konkreten Figuren oder Körpern entdecken zu lassen und sie auf der Basis ihrer gewachsenen und zu fördernden Intuition argumentieren zu lehren, als sie im Zaubergarten einer (sei es auch nur lokal-) deduktiven Theorie herumzuführen? Sinn und Triumph eines Beweises für den Schnitt der Winkelhalbierenden im Dreieck kann doch wohl nur der erfassen, der die Not, intuitiv als wahr Empfundenes andern hieb- und stichfest aufzeigen zu müssen, erfahren und bejaht hat: Am besten, er hat einmal irgend etwas, den Klassenkameraden voraus und mit Mühe, gefunden und Ungläubigen erklären wollen . . . Läßt sich derartiges nicht wenigstens in Gruppenarbeit stimulieren? Bei realistischer Motivation?

Daß Dreiecke durch die <sup>dre</sup> Stücke bestimmt sind, wenn man eine triviale und eine nicht-triviale Ausnahme macht, ist der Inhalt der Kongruenzsätze. Bis auf den nichttrivialen Ausnahmefall ist das intuitiv von vornherein klar, es geht z. T. schon in den Glauben an die Existenz der verschiedenen Bewegungen ein, also – wenigstens beim Bildungszugang – in die Grundsätze. Die Herleitung und Einübung der ganzen Satzsequenz ist sinnloser Schematismus, wenn Situationen fehlen, in denen die Sätze essentiell notwendig sind. Entweder wir bringen den Schüler in solche Situationen, oder wir verzichten auf die Kongruenzsätze!

Kongruenz- und Ähnlichkeitssätze wie auch die Satzgruppe „von“ Pythagoras sollten in diesem Sinne bedarfsorientiert gelehrt werden. Die Zwecke, aus denen heraus diese Dinge sich entfaltet, sind doch nicht alle überholt! Demgegenüber sollte die Trigonometrie stark zurückgesetzt werden: Ist nicht vieles an den traditionellen Dreiecksberechnungen Kompensation der nachchristlichen Mathematiker gegenüber den Klassikern gewesen? Jedenfalls halten die trigonometrischen Rechenaufgaben mit der aktuellen Bedeutung der Sinus- und Cosinusfunktionen kaum mit (z. B. Steckdose). Hier gerät das funktionale Denken immer noch allzuoft in Vergessenheit.

Schließlich, doch keineswegs zuletzt, müssen wir dringend etwas dagegen tun, daß die Körper zwischen 7. und 10. Schuljahr in Vergessenheit geraten. Welche Welt vermessen wir denn mit unseren Abbildungsgruppen, wenn wir der Raumschauung so lange keinerlei Beachtung schenken?

Diese Wunschliste läßt sich beliebig verlängern, doch sie scheint mir den neuralgischen Punkt der gegenwärtigen Mittelstufengeometrie anzugreifen:

Ihr ist nur zu helfen, wenn man sie auf die Erde zurückholt!

Dies setzt voraus, daß sich der „Primat der Didaktik“ auf die Grenzen des methodisch Lehrreichen besinnt, vielleicht – siehe Geometrie – nur auf die Wirklichkeit . . .

Anschrift des Verfassers:

Lutz Führer  
Breslauer Str. 60  
3250 Hameln-Afferde

Die Mittel meiner Erziehungsweise lenken im ganzen und allgemeinen gar nicht auf schnellen Erfolg und versprechen ihn auch nicht. Sie können ihn auch nicht versprechen. Der Mensch ist das einzige Geschöpf, das die Natur langsam erzieht; auch wir müssen es tun; alle ihre Mittel verbannen allen Schein unreifer Resultate und fordern langes vertrauensvolles Warten in scheinlosen Elementarübungen. Nur die Vollenendung dieser ersten und notwendigen Schritte gründet den spätern und außerordentlichen Erfolg unserer Mittel. Das Zurückziehen der Kinder, ehe dieser Erfolg gesichert ist, macht sie die wohlthätigen Folgen unserer Bemühungen größtenteils verlieren. In den Händen von Menschen, die unsere Grundsätze nicht kennen, nicht auf sie bauen oder gar absichtlich dagegen handeln, muß unsere Arbeit notwendig verlohrengehen. Darum zeugen auch Kinder, die uns so früh entrissen werden, so wenig gegen die Richtigkeit unserer Grundsätze und unserer Resultate, als das Fehlen [die Fehler] von geistlosen Nachahmungen unsers Tuns von Leuten, die den Sinn unserer Grundsätze weder ahnen noch verstehen und also sich unsere Mittel auch nicht haben eigen machen können.

Pestalozzi  
S. 186